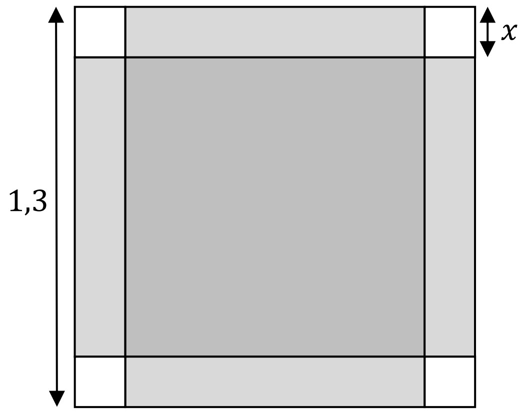
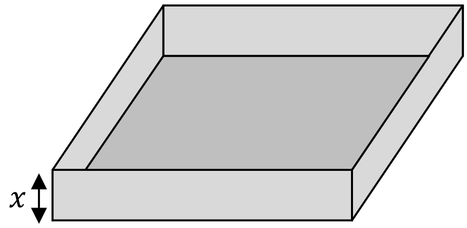
Activité 2 – Optimiser un volume

On souhaite fabriquer un bac de récupération d'eau à partir d'une plaque de tôle carrée de 1,3 m de côté. La mesure de la profondeur du bac, exprimée en mètres est notée x.





Problématiques :
1. Quelle doit être la hauteur du bac pour que le volume soit le plus grand possible ?
2. Quelle doit être la hauteur du bac pour que le volume soit égal à 0,1 m³ ?

1. Donner quelles sont les deux valeurs extrêmes que peut prendre la variable x ?

2. Calculer les volumes dans les cas où $x = 0{,}1$ puis $x = 0{,}2$ et $x = 0{,}4$. **Indiquer** ce que l'on peut constater.

3. Montrer que le volume V est donné par la relation $V(x) = 4x^3 - 5{,}2x^2 + 1{,}69x$ pour x compris dans l'intervalle $[0\ ;\ 0{,}65]$. Cours 3

4.1. Compléter le tableau de valeurs de la fonction V en utilisant le mode **TABLE** de la calculatrice (**arrondir** au millième).

x	0	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}6$	$0{,}65$
$V(x)$								

4.2. En utilisant le tableau de la question 4.1 **donner** un encadrement (le plus petit possible) de la valeur de x pour laquelle le volume maximum est atteint.

5.1. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction V (**utiliser** la couleur bleue pour le tracé).

Fenêtre graphique :
$Xmin = 0\ ;\ Xmax\ =\ 0{,}65\ ;\ Xgrad = 0{,}05.$
$Ymin = -0{,}6\ ;\ Ymax = 0{,}3\ ;\ Ygrad = 0{,}1.$

MAES Olivier
Lycée Sainte-Thérèse – Saint-Nazaire

5.2. Déterminer à l'aide de la calculatrice le maximum de la fonction V ainsi que la valeur de x pour laquelle il se produit.

5.3. En utilisant les réponses aux questions 5.1 et 5.2, **construire** le tableau de variations de la fonction V.

Valeurs de x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $0{,}65$
Variations de $V(x)$	

6.1. Utiliser le tableau de variations de la question précédente pour déterminer le nombre de solutions à l'équation $V(x) = 0{,}1$. **Justifier** la réponse. Cours 4

6.2. Tracer sur la calculatrice la droite d'équation $y = 0{,}1$ (**utiliser** la couleur verte pour le tracé).

6.3. Résoudre graphiquement sur la calculatrice l'équation $V(x) = 0{,}1$ (**arrondir** au centième si nécessaire).

7.1. Calculer la fonction V', dérivée de la fonction V.

7.2. Tracer sur la calculatrice sur le même graphique que pour la question 5.1 la courbe représentative de la fonction V' (**utiliser** la couleur rouge pour le tracé).

7.3. Déterminer graphiquement à l'aide de la calculatrice la solution de l'équation $V'(x) = 0$ (**arrondir** au millième).

7.4. Vérifier à l'aide du menu **résol** de la calculatrice la réponse trouvée à la question 6.3 pour l'équation $V'(x) = 0$.

7.5. En utilisant les réponses aux questions 6.1 à 6.4, **construire** le tableau de signes de la fonction V'.

Valeurs de x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $0{,}65$
Signe de $V'(x)$	

8.1. Observer les deux tableaux des questions 5.3 et 6.4. **Conjecturer** le lien qui existe entre le signe de la fonction dérivée V' et le sens de variation de la fonction V ? Cours 5

8.2. Indiquer ce qu'il se passe lorsque la fonction dérivée s'annule (en changeant de signe) ? Cours 5

9. Répondre aux deux problématiques.

Dans les exercices, tous les arrondis se feront au centième si nécessaire.

Exercice 01

Pour chacun des polynômes de degré 3 suivants, donner les valeurs des coefficients a, b, c et d.

1. $f(x) = 3{,}5x^3 - 2x^2 + 4{,}7x - 1$
2. $g(x) = -1{,}3x^3 + 5x^2 - 3{,}4x + 2$
3. $h(x) = 7x^3 + 2{,}8x^2 + 6x + 1{,}2$
4. $j(x) = 4x^3 - 1{,}7x^2 + 3x - 5{,}5$
5. $k(x) = -2{,}1x^3 + 6x^2 + 3$
6. $l(x) = 5x^3 + 3{,}6x^2 - 7x$
7. $m(x) = -3x^3 + 2x - 1{,}1$
9. $n(x) = 1{,}8x^3 - 6x^2$
9. $p(x) = 2x^3 - 2{,}6$
10. $q(x) = -4x^3$
10. $r(x) = 3x + 2 - 4x^3 + 5x^2$
11. $s(x) = -2x^2 - x^3 + 7$

Exercice 02

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - x + 1$ définie sur l'intervalle $I = [-2\,;3]$.

1. Calculer la fonction dérivée f'.
2. Résoudre graphiquement sur l'intervalle I l'équation $f'(x) = 0$ (**arrondir** au centième).
3. Vérifier à l'aide du menu **résol** de la calculatrice les réponses à la question 2.
4. Construire sur l'intervalle I le tableau de variations de la fonction f.

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de $f(x)$	

5.1. Donner en le justifiant le nombre de solutions à l'équation $f(x) = -3$.
5.2. Donner en le justifiant le nombre de solutions à l'équation $f(x) = 0$.
6.1. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Fenêtre graphique :
$Xmin = -2$; $Xmax = 3$; $Xgrad = 1$.
$Ymin = -15$; $Ymax = 15$; $Ygrad = 2$.

6.2. Déterminer graphiquement les solutions à l'équation $f(x) = -3$.
6.3. Déterminer graphiquement les solutions à l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 03

Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^3 + 6x^2 - 2{,}25x - 2$ définie sur l'intervalle $I = [-1\,;2]$.

1. Calculer la fonction dérivée f'.
2. Résoudre graphiquement sur l'intervalle I l'équation $f'(x) = 0$.
3. Vérifier à l'aide du menu **résol** de la calculatrice les réponses à la question 2.
4. Construire sur l'intervalle I le tableau de variations de la fonction f.

MAES Olivier
Lycée Sainte-Thérèse – Saint-Nazaire

5.1. Donner en le justifiant le nombre de solutions à l'équation $f(x) = 4$.
5.2. Donner en le justifiant le nombre de solutions à l'équation $f(x) = -2$.
6.1. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Fenêtre graphique :
$Xmin = -1$; $Xmax = 2$; $Xgrad = 0{,}5$.
$Ymin = -10$; $Ymax = 10$; $Ygrad = 2$.

6.2. Déterminer graphiquement les solutions à l'équation $f(x) = 4$.
6.3. Déterminer graphiquement les solutions à l'équation $f(x) = -2$.

Exercice 04

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 5x + 2$ définie sur l'intervalle $I = [0\,;3]$.
1. Calculer la fonction dérivée f'.
2. Résoudre sur l'intervalle I l'équation $f'(x) = 0$.
3. Vérifier à l'aide du menu **résol** de la calculatrice les réponses à la question 2.
4. Construire sur l'intervalle I le tableau de variations de la fonction f.
5.1. Donner en le justifiant le nombre de solutions à l'équation $f(x) = -5$.
5.2. Donner en le justifiant le nombre de solutions à l'équation $f(x) = 5$.
6.1. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Fenêtre graphique :
$Xmin = 0$; $Xmax = 3$; $Xgrad = 0{,}5$.
$Ymin = -15$; $Ymax = 25$; $Ygrad = 5$.

6.2. Déterminer graphiquement les solutions à l'équation $f(x) = -5$.
6.3. Déterminer graphiquement les solutions à l'équation $f(x) = 5$.

Exercice 05

1. Construire sur l'intervalle $[-5\,;2]$ le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.
2. Construire sur l'intervalle $[0\,;5]$ le tableau de variation de la fonction $g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$.
3. Construire sur l'intervalle $[-2\,;3]$ le tableau de variation de la fonction $h(x) = -x^3 + 3x + 2$.

MAES Olivier
Lycée Sainte-Thérèse – Saint-Nazaire